Предполагаемый слив №2 от 16.05.2019.

13. а) Решите уравнение

$$\log_3(4x-1)\log_{4x-1}9 = x^2 - x.$$

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[\log_5 20\,;\log_3 25]$.

Решение.

а) ОДЗ:

$$\begin{cases}4x-1>0,\\4x-1\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{4},\\x\neq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

В левой части воспользуемся преобразованием, равносильным на ОДЗ:

$$\log_a b\cdot\log_c d = \log_c b\cdot\log_a d.$$

$$\log_{4x-1}(4x-1)\cdot\log_3 9 = x^2 - x,$$

$$2 = x^2 - x,$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=2.\end{array}\right.$$

ОДЗ принадлежит только корень $x=2$.

б) Сравним единственный корень с концами отрезка:

$$\log_5 20 \vee 2,\qquad \log_5 20 < \log_5 25\,,\qquad \log_5 20 < 2.$$

$$\log_3 25 \vee 2,\qquad \log_3 25 > \log_3 9\,,\qquad \log_3 25 > 2,$$

значит $x=2$ входит в рассматриваемый отрезок.

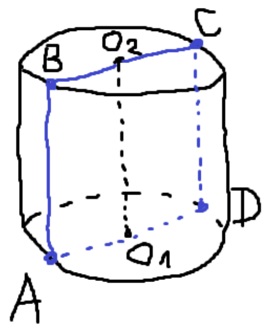
Ответ: а) 2; б) 2.

14. В прямом цилиндре с радиусом основания равным 4 проведена плоскость α, содержащая высоту цилиндра. Образующая цилиндра равна 8.

а) Докажите, что сечение плоскостью α является квадратом.

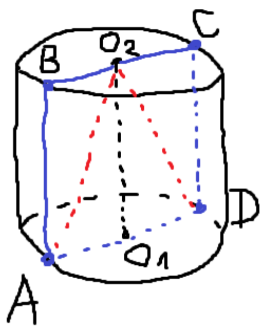
б) Найдите (объем ИЛИ площадь боковой поверхности ИЛИ площадь полной поверхности) конуса, вписанного в цилиндр.

Решение.



а) Высота прямого цилиндра перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра, значит плоскость α также перпендикулярная основаниям цилиндра. Пусть плоскость α, проходящая через O_1O_2, пересекает нижнее основание в точках A и D, симметричных относительно O_1. Проведем перпендикуляры из этих точек на верхнее основание, получим точки B и C. Искомое сечение $ABCD$ цилиндра плоскостью α построено.

По условию задачи $AB = CD = 8$, а так как AD и BC – диаметры оснований, то $AD = BC = 2R = 8$. Наконец, поскольку плоскость α перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра, получаем, что $ABCD$ – квадрат, что и требовалось доказать.



б) Пусть AO_2 – образующая вписанного конуса. Из прямоугольного треугольника AO_1O_2:

$$AO_2 = \sqrt{AO_1^2 + O_1O_2^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}.$$

Тогда объем конуса равен

$$V_{\text{К}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 8 = \frac{128\pi}{3};$$

площадь боковой поверхности конуса равна

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi\cdot 4\cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}\pi;$$

площадь полной поверхности конуса равна

$$S_{\text{полн}} = \pi R(l+R) = \pi\cdot 4\left(4\sqrt{5}+4\right) = \left(1+\sqrt{5}\right)\cdot 16\pi.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) $\frac{128\pi}{3}$, $16\sqrt{5}\pi$, $\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot 16\pi$.

15. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-3}-2x+3}{x-5} > -1.$$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{x-3}-2x+3}{x-5}+1 > 0, \qquad \frac{\sqrt{x-3}-2x+3+x-5}{x-5} > 0,$$

$$\frac{\sqrt{x-3}-(x+2)}{x-5} > 0.$$

Заметим, что на ОДЗ выражение $(x+2)$ принимает только положительные значения, а значит применим метод знакотождественных множителей, описанный в учебнике Пратусевича, входящий в действующий Федеральный перечень учебников, а также рассказанный в методичках МЦНМО, входящих во ФГОС и допущенных до участия в образовательном процессе, среди авторов которых числится и сам Иван Валерьевич Ященко, против которого вы не попрете, так что, уважаемые тупорылые проверяющие эксперты, можете заткнуться.

$$\frac{(x-3)-(x+2)^2}{x-5} > 0, \qquad \frac{x-3-x^2-4x-4}{x-5} > 0,$$

$$\frac{-x^2-3x-7}{x-5} > 0, \qquad \frac{x^2+3x+7}{x-5} < 0.$$

Заметим, что $x^2+3x+7 > 0$ при любом действительном значении x, поскольку $D = 9 - 4 \cdot 7 = 9 - 28 = -19$, поэтому неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x-5} < 0,$$

которое, с учётом ОДЗ, даёт решение: $3 \leq x < 5$.

Ответ: $[3; 5)$.

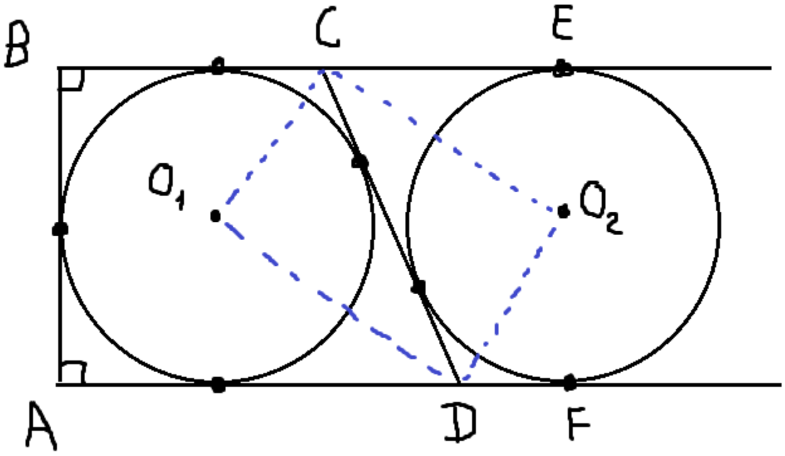
16. В прямоугольную трапецию с прямым углом A вписана окружность. Вторая окружность касается стороны CD и продолжений оснований.

а) Докажите, что четырехугольник с вершинами C и D и центрами окружностей – прямоугольник.

б) Найдите площадь этого прямоугольника, если окружность, вписанная в трапецию, делит верхнее основание на отрезки 5 и 3, считая от прямого угла.

Решение.

а) Поскольку в условии задачи сказано, что CD – сторона, то положение боковых сторон и оснований трапеции $ABCD$ определяется однозначно.



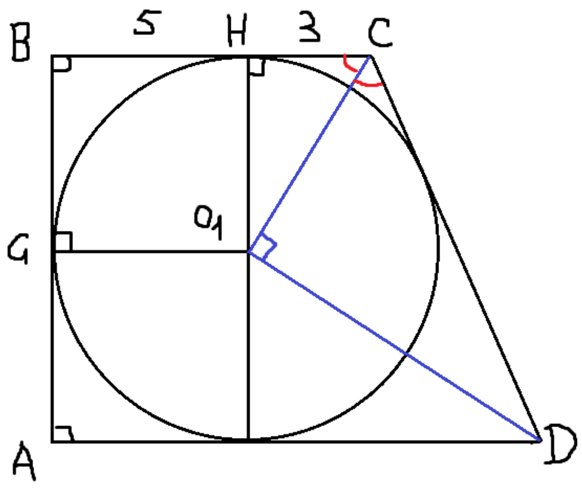
По определению центры окружностей, вписанных в углы, лежат на биссектрисах этих углов. Поэтому CO_1, CO_2, DO_1, DO_2 – биссектрисы углов BCD, ECD, ADC, FDC соответственно.

Известно, что биссектрисы углов, дающих в сумме 180 градусов, пересекаются под прямым углом. В частности, углы BCD и ECD являются смежными, значит $\angle O_1CO_2 = 90°$, аналогично $\angle O_1DO_2 = 90°$. По свойству трапеции углы при боковых сторонах также в сумме дают 180 градусов, откуда $\angle CO_1D = 90°$, аналогично $\angle CO_2D = 90°$. Значит O_1CO_2D – прямоугольник, что и требовалось доказать.

б) Пусть H и G – точки касания внутренней окружности с BC и AB соответственно. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $BG = BH$, отрезки O_1G и O_1H равны как радиусы и перпендикулярны AB и BC. Значит BHO_1G – квадрат. Отсюда, в частности, получим $O_1H = 5$.

Из прямоугольного треугольника O_1HC:

$$CO_1 = \sqrt{HC^2 + HO_1^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$



Из пункта "а" известно, что CO_1 – биссектриса угла BCD и что угол CO_1D – прямой. Значит

$$O_1D = CO_1 \cdot \operatorname{tg} \angle HCO_1 = \frac{5\sqrt{34}}{3}.$$

Тогда площадь четырехугольника O_1CO_2D равна

$$S_{O_1CO_2D} = CO_1 \cdot DO_1 = \sqrt{34} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{3} = \frac{170}{3}.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) 170/3.

17. В июле 2019 года планируется взять кредит на 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в 2020, 2022, 2024, 2026 годах нужно выплатить 100 000 рублей;

— в остальные годы необходимо выплатить суммы, отличающиеся друг от друга на 50 000 рублей (в 2021 самая крупная выплата, в 2023 на 50 000 рублей меньше и т.д.);

— в июле 2027 года сумма долга должна равняться нулю.

Какую сумму необходимо выплатить банку в течение всего срока кредитования?

Решение.

Пусть $A = 1000000$ рублей, $r = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$ – множитель роста, $b = 100000$ рублей, x рублей – сумма платежа в 2021 году, $c = 50000$ рублей.

Составим таблицу.

Год	Месяц	Долг
2019	Июль	A
2020	Январь	rA
	Фев.-июнь	$rA - b$
2021	Январь	$r^2A - rb$
	Фев.-июнь	$r^2A - rb - x$
2022	Январь	$r^3A - r^2b - rx$
	Фев.-июнь	$r^3A - r^2b - rx - b$
2023	Январь	$r^4A - r^3b - r^2x - rb$
	Фев.-июнь	$r^4A - r^3b - r^2x - rb - (x - c)$
2024	Январь	$r^5A - r^4b - r^3x - r^2b - r(x - c)$
	Фев.-июнь	$r^5A - r^4b - r^3x - r^2b - r(x - c) - b$
2025	Январь	$r^6A - r^5b - r^4x - r^3b - r^2(x - c) - rb$
	Фев.-июнь	$r^6A - r^5b - r^4x - r^3b - r^2(x - c) - rb - (x - 2c)$
2026	Январь	$r^7A - r^6b - r^5x - r^4b - r^3(x - c) - r^2b - r(x - 2c)$
	Фев.-июнь	$r^7A - r^6b - r^5x - r^4b - r^3(x - c) - r^2b - r(x - 2c) - b$
2027	Январь	$r^8A - r^7b - r^6x - r^5b - r^4(x - c) - r^3b - r^2(x - 2c) - rb$
	Фев.-июнь	$r^8A - r^7b - r^6x - r^5b - r^4(x - c) - r^3b - r^2(x - 2c) - rb - (x - 3c) = 0$

А спрашивают нас про величину

$$S = 4b + x + (x - c) + (x - 2c) + (x - 3c) = 4b + 4x - 6c.$$

Осуществляем преобразования:

$$r^8A - r^7b - r^6x - r^5b - r^4(x - c) - r^3b - r^2(x - 2c) - rb - (x - 3c) = 0.$$

$$r^8A - b(r^7 + r^5 + r^3 + r) - x(r^6 + r^4 + r^2 + 1) + c(r^4 + 2r^2 + 3) = 0.$$

$$r^8A - \frac{1 - r^8}{1 - r^2} \cdot rb - \frac{1 - r^8}{1 - r^2} \cdot x + c(r^4 + 2r^2 + 3) = 0.$$

Получим 1 балл по критериям:

$$x = \frac{r^8A - \frac{1 - r^8}{1 - r^2} \cdot rb + c(r^4 + 2r^2 + 3)}{\frac{1 - r^8}{1 - r^2}} = 281097{,}341474802.$$

$$S = 1224389{,}36589921.$$

Ответ: 1 224 389,36589921 рубля.

Что-то странное тут происходит явно.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y - ay + \dfrac{y}{a} - x^2 - ax - \dfrac{x}{a} = 1, \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

имеет (4, 3, 2) решения.

Решение.

Не знаю как это решать.

19. Учащиеся 11 классов сдавали тест ЕГЭ. Каждый тест оценивается от 0 до 100 баллов. После получения результатов пять друзей начали хвалиться своими баллами друг с другом. Каждый сдавал русский язык и профильную математику. Четверо сдавали физику, трое сдавали информатику, и двое сдавали обществознание. Сумма баллов по физике не больше 300, а по информатике не меньше 220. Сумма баллов по обществознанию – сумма баллов двух лучших тестов по физике и информатике.

а) Мог ли один из друзей не сдать экзамен?

б) Могли ли двое друзей вместе не сдать какой-то экзамен, если два участника написали обществознание на 87 и 78 баллов?

в) Какое наибольшее количество друзей могли не сдать хоть один экзамен, если лучшая работа по физике оценена не более чем в 80 баллов, по информатике – не более 75 баллов, по обществознанию – не менее 90 баллов?

Решение.

Условие задачи очень интересное. Если все сдавали русский язык и профильную математику, то вопрос пункта "а" и остальных задается для физики, информатики и обществознания? Будем считать, что да. Ну так 1 человек точно не сдавал экзамен по информатике. Значит ответ "да".

Если речь идёт о наборе 0 баллов, ну так они все могли получить как 0 баллов по русскому языку, так и 0 баллов по математике, ибо в условии ничего не сказано про баллы русского языка и математики.

В очередной раз убеждаемся в том, что надо решать задачи, а не уповать на слив, разве что только Дмитрий Гущин вновь не опубликует чего-нибудь на своей странице накануне экзамена.